EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….059**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

În sistemul cartezian de coordonate $Oxyz$ se consideră punctele $A(4, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$, $C(0, 0, 4)$.

(4p) **a)** Să se determine lungimea segmentului (AC).

(4p) **b)** Să se determine distanța de la punctul $B(0, 4, 0)$ la planul (xOz).

(4p) **c)** Să se calculeze în mulțimea $\mathbf{C}$, numărul i^{2007}.

(4p) **d)** Să se determine ecuația tangentei în punctul $M(6, -6)$ la parabola de ecuație $y^2 = 6x$.

(2p) **e)** Să se arate că punctele $A(4, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$ și $C(0, 0, 4)$ aparțin planului $x + y + z = 4$.

(2p) **f)** Să se rezolve în mulțimea $\mathbf{C}$ ecuația $z^2 - 6z + 25 = 0$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze $C_5^1 + C_5^3 + C_5^5$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\log_2(\log_3 9)$.

(3p) **c)** Să se calculeze $1 - 2 + 2^2 - 2^3 + ... - 2^7 + 2^8$.

(3p) **d)** Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x - 3$. Să se rezolve ecuația $f(f(x)) = x$.

(3p) **e)** Să se determine numărul funcțiilor surjective $f : \{1, 2, 3\} \to \{4, 5\}$.

2. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x - 1 - \ln x$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, pentru $x > 0$.

(3p) **b)** Să se determine numărul punctelor de extrem ale funcției f.

(3p) **c)** Să se determine $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$.

(3p) **d)** Să se arate că funcția f este convexă pe $(0, \infty)$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_1^e (x - 1 - f(x))\,dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $O_3, I_3, A \in M_3(\mathbf{Z})$, $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

şi funcția $f_A : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_A(x) = \det(A + xI_3)$.

(4p) **a)** Să se calculeze $\det(A)$.

(4p) **b)** Pentru $x \in \mathbf{R}$, să se calculeze $f_A(x)$.

(4p) **c)** Să se demonstreze că $(A^2 - 2I_3)(A - 2I_3) = O_3$.

(2p) **d)** Să se demonstreze că $\forall\, k \in \mathbf{N}$, $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$, $(k+1) \cdot (k+2) \cdot \ldots \cdot (k+n) = n! C_{k+n}^{k}$.

(2p) **e)** Să se demonstreze că $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$, produsul a n numere întregi consecutive este divizibil cu $n!$.

(2p) **f)** Să se demonstreze că dacă $g \in \mathbf{Z}[X]$ are o rădăcină întreagă, atunci numărul $g(0) \cdot g(1) \cdot g(2) \cdot \ldots \cdot g(n)$ este divizibil cu $(n+1)!$, $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **g)** Să se demonstreze că numărul $\det(A) \cdot \det(A + I_3) \cdot \det(A + 2I_3) \cdot \ldots \cdot \det(A + 2006 I_3)$

este divizibil cu $2007!$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 + \sin^2 x}$, $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$.

(4p) **a)** Să se demonstreze că $\forall\, x \in \mathbf{R}$, $f(-x) = f(x)$ şi $f(x + 2\pi) = f(x)$.

(4p) **b)** Să se calculeze $g(x)$ şi $g'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(4p) **c)** Să se demonstreze că funcția g este periodică.

(2p) **d)** Să se demonstreze că $\forall\, n \in \mathbf{Z}$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$, $g(2n\pi - x) = -g(x)$.

(2p) **e)** Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{2\pi} t \cdot f(t)\, dt$.

(2p) **f)** Pentru $n \in \mathbf{N}^*$, să se calculeze $\displaystyle\int_0^{2n\pi} t \cdot f(t)\, dt$.

(2p) **g)** Să se demonstreze că nu există $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \int_0^x t \cdot f(t)\, dt$.